Über das thermische Gleichgewicht zwischen Strahlung und freien Elektronen.

Von **W. Pauli jr.**, zurzeit in Kopenhagen.

(Eingegangen am 9. August 1923.)

Das thermische Gleichgewicht zwischen Strahlung und freien Elektronen wurde unter Zugrundelegung der klassischen Elektrodynamik von H. A. Lorentz[1]) und Fokker[1]) untersucht mit dem Resultat, daß nicht nur die Plancksche spektrale Verteilung der Strahlungsenergie bei Anwesenheit eines Elektrons in einem Strahlungshohlraum nicht erhalten bliebe, sondern daß auch bei deren künstlicher Aufrechterhaltung das Elektron im Strahlungsfelde nicht den von der statistischen Wärmetheorie geforderten Betrag $^3/_2 kT$ von mittlerer kinetischer Translationsenergie erhalten würde[2]). Man konnte daraus den wichtigen Schluß ziehen, daß auch bei der Beschreibung der Wechselwirkung von Strahlung und freien Elektronen die klassische Theorie versagt, obwohl wir es bei freien Elektronen mit einem Fall zu tun haben, wo im Gegensatz zum Fall von Atomen oder Planckschen Oszillatoren bei Abwesenheit des Strahlungsfeldes von einer Anwendung der Quantentheorie auf die Bewegung des betrachteten Systems noch keine Rede ist. Und es entsteht nun das Problem, einen quantentheoretischen Mechanismus der Wechselwirkung von Strahlung und freien Elektronen zu finden, welcher der thermodynamischen Forderung genügt, daß Elektronen mit Maxwellscher Geschwindigkeitsverteilung und ein Plancksches Strahlungsfeld miteinander im Gleichgewicht sein müssen.

---

[1]) H. A. Lorentz, Bericht über den Solvay-Kongreß in Brüssel 1911; A. D. Fokker, Dissertation Leiden, 1913; Arch. Néerl. (3a) 4, 379, 1918.

[2]) Die mittlere Translationsenergie des Elektrons ergibt sich in diesem Fall nach Fokker gleich $^3/_2\, k\, T \dfrac{\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^4} - \sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^5}}{\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^4}} = {}^3/_2\, k\, T \,.\, 0{,}0412.$

Bekanntlich hat nun Einstein[1]) in sehr allgemeiner Weise einen solchen quantentheoretischen Mechanismus für die Wechselwirkung zwischen Strahlung und materiellen Systemen, wie z. B. Atomen, angegeben. Der Energieaustausch bei den Elementarprozessen wird dabei als durch die Bohrsche Frequenzbedingung

$$h\nu = E \tag{1}$$

geregelt angenommen, worin E die beim Elementarprozeß emittierte (absorbierte) Energie und ν die emittierte (absorbierte) Frequenz bedeutet. Es werden dann weiter spontane Ausstrahlungsprozesse und erzwungene positive und negative Einstrahlungsprozesse unterschieden, die bzw. mit Aufnahme und Abgabe von Strahlungsenergie durch das materielle System verbunden sind. Die Häufigkeit A pro Sekunde der Ausstrahlungsprozesse für ein im betreffenden Zustande befindliches System ist eine spezifische Eigenschaft der betrachteten Systeme, während die Häufigkeit $B\varrho_\nu$ der Einstrahlungsprozesse der Strahlungsdichte ϱ_ν bei der betreffenden Frequenz proportional angenommen wird[2]). Die Koeffizienten A und B müssen dann stets im Verhältnis

$$\frac{A}{B} = \alpha \nu^3 \tag{2}$$

zueinander stehen, worin α die universelle Konstante

$$\alpha = \frac{8\pi h}{c^3} \tag{3}$$

bedeutet, damit im Planckschen Strahlungsfelde

$$\varrho_\nu = \frac{\alpha \nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{4}$$

und bei Maxwellscher Verteilung der verschiedenen Zustände der materiellen Systeme Gleichgewicht zwischen der inneren Energie der

1) A. Einstein, Phys. ZS. **18**, 121, 1917.

2) Dabei sind der Einfachheit halber die statistischen Gewichte im Anfangs- und Endzustande des Prozesses als gleich vorausgesetzt. Im gegenteiligen Fall sind die Wahrscheinlichkeiten der positiven und negativen Einstrahlungsprozesse nicht gleich, sondern verhalten sich zueinander wie die genannten Gewichte. In Gleichung (2) des Textes ist dann für B der Wahrscheinlichkeitskoeffizient der negativen Einstrahlungsprozesse zu setzen. Ferner ist zu bemerken, daß die im Text besprochenen Betrachtungen Einsteins nicht notwendig an die Voraussetzung des Vorhandenseins von diskreten stationären Zuständen des materiellen Systems gebunden sind. Sie gelten unter anderem auch für solche Systeme, denen wir bei den kontinuierlichen Spektren begegnen, wie z. B. für ein freies Elektron, das an einem Kern vorbeifliegt. Vgl. hierzu H. A. Kramers, Phil. Mag. 1923, im Druck befindlich.

materiellen Systeme und der Strahlungsenergie vorhanden sei. Weiter zeigte Einstein, daß auch die Translationsenergie der Systeme als Ganzes mit der Strahlungsenergie im Gleichgewicht ist, wenn man annimmt, daß bei jedem Elementarprozeß zugleich mit der Energie E ein linearer Impuls Γ vom Betrage

$$|\Gamma| = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} \tag{I}$$

in einer „zufälligen" Richtung auf das System übertragen wird. Wenn es auch vielleicht nicht berechtigt ist, von hier aus mittels einer Anwendung der Begriffe der klassischen Elektrodynamik auf das dem einzelnen Elementarprozeß entsprechende elektromagnetische Feld endgültige Schlüsse über die Natur der Strahlung zu ziehen [1]), scheint es andererseits, im Hinblick auf die Notwendigkeit des thermischen Gleichgewichtes auch der Translationsenergie mit der Strahlungsenergie, kaum möglich, die Annahme des Vorhandenseins des Rückstoßes (I) in Zweifel zu ziehen.

Trotz der Allgemeinheit der Einsteinschen Überlegungen fällt der von uns betrachtete Fall des Gleichgewichtes zwischen Strahlung und freien Elektronen nicht unter ihren Gültigkeitsbereich. Es ist nämlich eine wesentliche Voraussetzung dieser Betrachtungen, daß die Kräfte zwischen den Teilchen (Elektronen, Kernen) des materiellen Systems groß sind gegenüber den Kräften des äußeren Strahlungsfeldes [2]). Unser Fall zeichnet sich dagegen gerade dadurch aus, daß die ersteren Kräfte verschwinden und die letzteren allein vorhanden sind. Dies hat zur Folge, daß spontane Übergänge (bei Abwesenheit des Strahlungsfeldes) hier überhaupt nicht stattfinden und daß wir nur die Translationsenergie der Elektronen zu betrachten brauchen, da hier ja ein Analogon zur inneren Energie der materiellen Systeme fehlt. Auch deshalb schien uns der hier betrachtete Fall von besonderem Interesse.

Wir wollen nun den folgenden Betrachtungen diejenigen Annahmen über den Elementarprozeß zugrunde legen, die von Compton [3]) und Debye [4]) aufgestellt wurden, veranlaßt durch Experimente des erstgenannten Autors, auf deren Diskussion wir hier jedoch nicht eingehen wollen. Diese Annahmen sind eine natürliche Verall-

---

[1]) N. Bohr, ZS. f. Phys. **13**, 117—165, 1923; S. 157, 164.

[2]) Vgl. N. Bohr, ebenda, S. 142.

[3]) A. H. Compton, Bull. Nat. Research Council Nr. 20, S. 10 (Okt. 1922); Phys. Rev. **21**, 483, 1923.

[4]) P. Debye, Phys. ZS. **24**, 161, 1923.

gemeinerung von (1) und (I) und bestehen in folgendem. Wenn ein Strahlungsquant

$$E = h\nu \tag{1}$$

mit dem Impuls

$$|\Gamma| = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} \tag{I}$$

auf ein Elektron mit dem Impuls

$$\mathfrak{G} = \frac{m_0\,\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{5}$$

und der kinetischen Energie

$$U = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{|\mathfrak{G}|^2}{m_0^2 c^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\,{}^{1)} \tag{6}$$

auftrifft, so kann das Quant $h\nu$ in ein Quant $h\nu_1$ einer anderen Frequenz verwandelt werden, dessen Impuls dem Betrage nach wieder durch $\frac{E_1}{c} = \frac{h\nu_1}{c}$ gegeben ist, während seine Richtung beliebig sein kann. Hand in Hand damit geht eine Änderung der Geschwindigkeit des Elektrons, die durch den Impuls- und Energiesatz bestimmt ist. Es muß gelten

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{G} + \Gamma &= \mathfrak{G}_1 + \Gamma_1 \\ E + U &= E_1 + U_1 \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

worin $\mathfrak{G}$, Γ und $\mathfrak{G}_1$, Γ_1 vektoriell zu denken sind und der Index 1 die Größen nach dem Prozeß bezeichnet, von denen U_1 und E_1 in derselben Weise mit $|\mathfrak{G}_1|$ und $|\Gamma_1|$ zusammenhängen, wie gemäß (5) und (6) U und E mit $|\mathfrak{G}|$ und $|\Gamma|$. Die Relationen (I), (II) und (6) sind invariant gegenüber Lorentztransformationen.

Für den praktisch wichtigen Fall, daß das Elektron zu Beginn des Prozesses ruht, folgt aus den angegebenen Relationen, daß ν_1 stets kleiner als ν oder höchstens gleich ν ist und andererseits größer ist als $\frac{\nu}{1 + 2\frac{h\nu}{m_0 c^2}}$. Der Wert von ν hängt dabei eindeutig ab vom Winkel Θ des Sekundärstrahles mit dem Primärstrahl. Für Frequenzen ν, die hinreichend klein sind gegenüber der Frequenz $\frac{m_0 c^2}{h}$, stimmt also für ein anfangs ruhendes Elektron ν_1 mit ν praktisch überein.

---

1) Es bedeutet hierbei $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit des Elektrons, $\beta = \frac{|\mathfrak{v}|}{c}$, m_0 dessen Ruhmasse, und es ist die Energie des ruhenden Elektrons gleich $m_0 c^2$ gesetzt.

Im betrachteten Falle, daß eine monochromatische Welle der Frequenz ν auf ein ruhendes Elektron auffällt, ist die Häufigkeit eines Elementarprozesses, bei dem der Winkel Θ zwischen Θ und $\Theta + d\Theta$ liegt, proportional dem zugehörigen Elementarwinkel $d\Omega = 2\pi \sin \Theta d\Theta$ und der Intensität der einfallenden Welle. Der Proportionalitätsfaktor ist eine Funktion der zwei Veränderlichen ν und Θ, von der wir zunächst nur wissen, daß sie (mit $h\nu$ multipliziert) im Gebiete langer Wellen in den Thomsonschen Ausdruck für die gestreute Energie übergehen muß, der bekanntlich proportional zu $\frac{1+\cos^2\Theta}{2}$ und von ν unabhängig ist. Für diese Funktion sind von Compton und Debye verschiedene Ansätze gemacht worden, auf die wir teilweise im folgenden zurückkommen werden. Für unseren Zweck können wir sie jedoch unbestimmt lassen, denn wir werden sehen, daß die Bedingung des thermodynamischen Gleichgewichtes dieser Funktion im betrachteten Fall keinerlei Beschränkungen auferlegt. Wesentlich ist für uns nur die angenommene Proportionalität der Häufigkeit der Prozesse mit der Intensität der einfallenden Welle im Falle, daß die einfallende Strahlung monochromatisch ist.

Durch die Häufigkeit der Prozesse im Falle des anfangs ruhenden Elektrons ist gemäß dem Relativitätsprinzip die Häufigkeit der Prozesse im allgemeinen Falle des anfangs beliebig bewegten Elektrons bereits mitbestimmt, und wir werden zunächst in § 2 die Folgerungen aus dem Relativitätsprinzip für die Häufigkeitsfunktionen im allgemeinen Falle diskutieren. Dabei werden sich insbesondere einfache Beziehungen ergeben für die Änderung des Wertes dieser Funktion, wenn man die Werte der unabhängigen Variablen vor dem Elementarprozeß mit denen nach dem Elementarprozeß vertauscht. Auf diese Beziehungen gestützt, werden wir in § 3 die Bedingung für das thermische Gleichgewicht diskutieren, die verlangt, daß jeder Elementarprozeß ebenso oft vorkommen muß wie sein inverser (der aus ersterem durch Umkehr der Zeit entsteht). Wir werden zeigen, daß man zunächst auf das Wiensche statt auf das Plancksche Strahlungsgesetz geführt wird, wenn man auch für eine nicht monochromatische einfallende Strahlung an dem einfachen Ansatz festhält, daß die Häufigkeit der Elementarprozesse $h\nu \rightarrow h\nu_1$ der spektralen Strahlungsdichte ϱ_ν proportional ist. Wir werden jedoch zeigen, daß man mit dem Planckschen Strahlungsgesetz in Einklang kommt, wenn man in einfacher Weise eine Wechselwirkung von Wellen verschiedener Frequenz postuliert.

§ 2[1]). Das Verhalten der Impuls- und Energiegrößen $(\mathfrak{G}, U)$, (Γ, E) bei einer Lorentztransformation wird durch die folgenden Formeln beherrscht[2]):

$$\Gamma'_x = \frac{\Gamma_x - \frac{v}{c^2} E}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Gamma'_y = \Gamma_y, \quad \Gamma'_z = \Gamma_z, \quad E' = \frac{E - v\Gamma_x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{7}$$

$$\mathfrak{G}'_x = \frac{\mathfrak{G}_x - \frac{v}{c^2} U}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathfrak{G}'_y = \mathfrak{G}_y, \quad \mathfrak{G}'_z = \mathfrak{G}_z, \quad U' = \frac{U - v\mathfrak{G}_x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{8}$$

Wie bereits erwähnt, sind dabei E und Γ sowie U und $\mathfrak{G}$ durch die invarianten Relationen (1) und (6) verbunden, die wir schreiben können:

$$\frac{E'^2}{c^2} - |\Gamma'|^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\Gamma|^2 = 0. \tag{9}$$

$$\frac{U'^2}{c^2} - |\mathfrak{G}'|^2 = \frac{U^2}{c^2} - |\mathfrak{G}|^2 = m_0^2 c^2. \tag{10}$$

Aus diesen Relationen folgt zunächst, daß es zu jedem Elementarprozeß ein Normalkoordinatensystem gibt, in welchem die Impulse von Strahlung und Elektron einander entgegengesetzt gleich sind. Gemäß (II) wird an diesem Sachverhalt durch den Elementarprozeß nichts geändert. Wenn wir in diesem Bezugssystem gemessene Größen mit dem Index 0 bezeichnen, soll also gelten:

$$\mathfrak{G}_0 + \Gamma_0 = \mathfrak{G}_0^1 + \Gamma_0^1 = 0. \tag{11}$$

Um dies einzusehen, bemerken wir, daß nach (9) und (10)

$$|\mathfrak{G} + \Gamma| \leqq |\mathfrak{G}| + |\Gamma| < \frac{E+U}{c}.$$

Also brauchen wir, um (11) zu erreichen, nur die x-Achse der Transformation in die Richtung von $\mathfrak{G} + \Gamma$ zu legen und in (7) und (8) $\frac{v}{c} = \frac{c|\mathfrak{G} + \Gamma|}{E+U}$ zu setzen. Betrachten wir nun den Elementarprozeß in diesem Normalkoordinatensystem. Zunächst ist hier die Frequenz ν_0 der Strahlung nach (5) und (6) gemäß (11) durch den Wert der Geschwindigkeit $v_0 = c\beta_0$ des Elektrons bereits mitbestimmt, gemäß

$$h\nu_0 = c|\mathfrak{G}_0| = m_0 c^2 \frac{\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}. \tag{12}$$

[1]) Die Betrachtungen dieses Paragraphen lassen sich durch Benutzung der vierdimensionalen Vektoranalysis wesentlich vereinfachen. Wir haben diese jedoch in der Darstellung des Textes nicht verwendet, um dessen Verständnis auch solchen Lesern zu ermöglichen, die mit diesem Kalkül nicht vertraut sind.

[2]) Vgl. z. B. Mathem. Enzykl. V, 19, Artikel über Relativitätstheorie, S. 641 und 674.

Setzen wir ferner den nach (II) beim Elementarprozeß unverändert bleibenden Wert von

$$E_0 + U_0 = E_0^1 + U_0^1 = W_0, \tag{13}$$

so wird durch

$$m_0 c^2 \frac{1 + \beta_0}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} = W_0, \quad \beta_0 = \frac{\left(\frac{W_0}{m_0 c^2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{W_0}{m_0 c^2}\right)^2 + 1} \tag{14}$$

β_0 durch W_0 eindeutig bestimmt. Daraus folgt weiter: Im Normalkoordinatensystem bleibt beim Elementarprozeß sowohl die Frequenz der Strahlung wie der Betrag der Geschwindigkeit des Elektrons unverändert:

$$v_0^1 = v_0, \quad \nu_0^1 = \nu_0. \tag{15}$$

Ein Energieaustausch zwischen Strahlung und Elektron findet hier also nicht statt. Der Elementarprozeß besteht bloß darin, daß die stets entgegengesetzt gleichen Richtungen von Elektronengeschwindigkeit und Strahlung im Raum sich ändern. In diesem Sinne spielt also bei den hier zugrunde gelegten Compton-Debyeschen Annahmen das Normalkoordinatensystem dieselbe Rolle wie in der klassischen Theorie das Koordinatensystem, in welchem das Elektron ruht[1]).

Weiter folgt, daß der durch den Elementarprozeß bewirkte Übergang von $\mathfrak{G}, U, \Gamma, E$ in $\mathfrak{G}_1, U_1, \Gamma_1, E_1$ stets auch durch eine Lorentztransformation erzielt werden kann. Denn im Normalkoordinatensystem genügt hierzu eine räumliche Drehung des Koordinatensystems, und die Aufeinanderfolge einer Lorentztransformation einer solchen räumlichen Drehung und einer zweiten Lorentztransformation ist mit einer einzigen Lorentztransformation äquivalent.

Fragen wir nun nach den unabhängigen Bestimmungsstücken eines Elementarprozesses, so sehen wir, daß die Angabe der Werte der Größen $\mathfrak{G}, \Gamma$ noch nicht ausreicht. Sobald wir aber noch die im Normalkoordinatensystem gemessene räumliche Richtung der Elektronengeschwindigkeit nach dem Prozeß relativ zu der Elektronengeschwindigkeit vor dem Prozeß angeben, die wir durch zwei räumliche Polarwinkel Θ_0, φ_0 charakterisieren, so sind offenbar $\mathfrak{G}_1$ und Γ_1 [und daher nach (9), (10) auch E_1, U_1] eindeutig bestimmt, da nach dem Obigen $\mathfrak{G}_0$ und Γ_0 aus $\mathfrak{G}$ und Γ und ebenso $\mathfrak{G}_1, \Gamma_1$ aus $\mathfrak{G}_0^1$ und Γ_0^1 folgt, und $\mathfrak{G}_0^1, \Gamma_0^1$ bei gegebenem Θ_0, φ_0 aus $\mathfrak{G}_0, \Gamma_0$ berechenbar sind. Wir wollen im folgenden stets $\mathfrak{G}, \Gamma, \Theta_0, \varphi_0$ als unabhängige Bestimmungsstücke eines Elementarprozesses verwenden.

[1]) Ein ähnliches Resultat hat schon Compton, Phys. Rev., l. c., abgeleitet. Ein Analogon zu diesem Normalkoordinatensystem im Falle der Einsteinschen Theorie ist bereits von E. Schrödinger, Phys. ZS. 23, 301, 1922 angegeben.

Dabei werden wir oft diejenigen Elementarprozesse betrachten, für welche diese Größen innerhalb eines durch $d\mathfrak{G}_x, \ldots d\Gamma_z$, $d\Theta_0$, $d\varphi_0$ bezeichneten Spielraums gegeben sind. Für die Gesamtheit dieser Prozesse werden die Größen nach dem Prozeß ebenfalls in einem differentiellen Bereich liegen, den wir durch $d\mathfrak{G}_x^1, \ldots d\Gamma_z^1$, $d\Theta_0$, $d\varphi_0$ bezeichnen. Insbesondere wollen wir hier nach dem Verhältnis der „Volumina"

$$d\mathfrak{G}\, d\Gamma\, d\Omega_0$$

und

$$d\mathfrak{G}_1\, d\Gamma_1\, d\Omega_0^1$$

vor und nach dem Prozeß fragen, worin zur Abkürzung

$$d\mathfrak{G} = d\mathfrak{G}_x d\mathfrak{G}_y d\mathfrak{G}_z, \quad d\Gamma = d\Gamma_x d\Gamma_y d\Gamma_z, \quad d\Omega_0 = \sin\Theta_0\, d\Theta_0\, d\varphi_0$$

und analoge Bezeichnungen für die Größen mit dem Index 1 gesetzt sind. Zunächst ist offenbar unabhängig von $\mathfrak{G}$ und Γ

$$d\Omega_0 = d\Omega_0^1, \tag{16}$$

so daß man Θ_0, φ_0 als fest gegeben ansehen kann. Ferner ergibt sich aus (7) und (8) mit Rücksicht auf (9) und (10) nach einfacher Rechnung, daß für jede Lorentztransformation die Relationen gelten:

$$\frac{d\mathfrak{G}'}{U'} = \frac{d\mathfrak{G}}{U}, \quad \frac{d\Gamma'}{E'} = \frac{d\Gamma}{E}. \tag{17}$$

Und mit Rücksicht darauf, daß nach dem oben Gesagten auch der Übergang von $(\mathfrak{G}, \Gamma)$ in $(\mathfrak{G}_1, \Gamma_1)$ durch eine Lorentztransformation erzeugt werden kann, erhält man schließlich

$$\frac{d\mathfrak{G}_1\, d\Gamma_1\, d\Omega_0^1}{U_1 E_1} = \frac{d\mathfrak{G}\, d\Gamma\, d\Omega}{U E}. \tag{18}$$

Für die mittlere Anzahl der hier betrachteten Elementarprozesse pro Sekunde für ein Elektron im betrachteten Geschwindigkeitsbereich können wir allgemein den Ansatz machen:

$$dN = F\, d\Gamma\, d\Omega_0, \tag{19}$$

worin F im allgemeinen von $\mathfrak{G}$, U, Γ, E, $\mathfrak{G}_1$, U_1, Γ_1, E_1 sowie von das äußere Strahlungsfeld beschreibenden Größen abhängen wird[1]. Da die Anzahl von gewissen Elementarprozessen in einer bestimmten Zeit T offenbar gegenüber Lorentztransformationen invariant sein muß, transformiert sich dN umgekehrt wie die Zeit T. Letztere transformiert sich aber bekanntlich wie $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, also nach (6) wie U.

[1] Gemäß (I) ist die Abhängigkeit von ν und ν_1 hierin bereits eingeschlossen.

Der Ausdruck (19) transformiert sich also wie $\frac{1}{U}$ und nach (17) folgt hieraus

$$F' \, d\mathfrak{G}' \, d\Gamma' \, d\Omega_0 = F \, d\mathfrak{G} \, d\Gamma \, d\Omega_0. \tag{20}$$

Nach (17) ist dies äquivalent mit

$$F = \frac{\Phi}{U\,E}, \tag{21}$$

worin Φ gegenüber Lorentztransformationen invariant ist.

Weitere Schlüsse über die Häufigkeitsfunktion F können wir erst ziehen, wenn wir spezielle Annahmen über die Abhängigkeit von F vom äußeren Strahlungsfelde machen, worauf wir im folgenden Paragraphen eingehen werden. Hier wollen wir noch diejenigen invarianten Funktionen Φ und ihre Eigenschaften ermitteln, die von den das äußere Strahlungsfeld beschreibenden Größen gänzlich unabhängig sind und nur von $\mathfrak{G}$, U, Γ, E sowie von $\mathfrak{G}_1$, U_1, Γ_1, E_1 abhängen.

Wie man auf Grund von (7) und (8) leicht nachrechnet, sind zunächst

$$J_1 = \frac{E\,U}{c^2} - (\mathfrak{G}\Gamma) = \frac{E_1\,U_1}{c^2} - (\mathfrak{G}_1\Gamma_1), \tag{22}$$

$$J_2 = \frac{E_1\,U}{c^2} - (\mathfrak{G}_1\Gamma) = \frac{E\,U_1}{c^2} - (\mathfrak{G}\Gamma_1) \tag{23}$$

spezielle Funktionen, die dieser Invarianzforderung genügen. Die Gleichheit der beiden Ausdrücke in (22) sowie der in (23) folgt hierbei durch Subtraktion der geeignet geschriebenen quadrierten Gleichungen (II) voneinander mit Rücksicht auf (9) und (10). Im Normalkoordinatensystem gehen die Invarianten J_1 und J_2 in einfache Funktionen von ν_0 bzw. von ν_0 und Θ_0 über. Andererseits kann offenbar jede gegenüber Lorentztransformationen invariante Funktion von $\mathfrak{G}$, U, Γ, E, $\mathfrak{G}_1$, U_1, Γ_1, E_1 im Normalkoordinatensystem nur von ν_0 und Θ_0 (nicht von φ_0) abhängen. Daraus folgt unmittelbar, daß jede solche Invariante als Funktion von J_1 und J_2 dargestellt werden kann. Die Eigenschaft der gegenüber Lorentztransformationen invarianten Funktionen J_1 und J_2, daß sie auch invariant bleiben bei Vertauschung der Werte der Variablen vor und nach dem Elementarprozeß, kommt daher auch allen anderen solchen Invarianten zu. Überdies bleiben sie auch invariant beim Übergang zum inversen Elementarprozeß, der aus ersterem durch Umkehr der Zeit entsteht und für den außer der bereits erwähnten Vertauschung der Variablenwerte auch noch die Vorzeichen der Impulse umzukehren sind. Die Invarianz gegenüber

Lorentztransformationen bringt also die anderen genannten Invarianzeigenschaften von selbst mit sich. Eine wesentliche Voraussetzung dabei ist, daß die betrachteten Größen nur von den in Rede stehenden Variablen abhängen und nicht etwa auch von Variablen, die das äußere Strahlungsfeld beschreiben.

§ 3. Wir sind jetzt genügend vorbereitet, um das eigentliche Problem, das wir uns anfangs gestellt haben, in Angriff nehmen zu können. Dieses können wir jetzt dahin formulieren, einen einfachen Ansatz für die in (19) auftretende Häufigkeitsfunktion F zu finden, welcher der Bedingung genügt, daß sich Elektronen mit Maxwellscher Geschwindigkeitsverteilung im Planckschen Strahlungsfeld im statistischen Gleichgewicht befinden. Die statistische Gleichgewichtsbedingung besagt allgemein, daß jeder Elementarprozeß im Mittel ebenso oft vorkommt wie sein inverser, der aus ersterem durch Umkehr der Zeit entsteht. Bedeutet $n\,d\mathfrak{G}$ die Anzahl der Elektronen in der Volumeneinheit, deren Impulsvektor $\mathfrak{G}$ im hervorgehobenen Bereich liegt, so lautet diese also:

$$F n\, d\mathfrak{G}\, d\Gamma\, d\Omega_0 = F_1 n_1\, d\mathfrak{G}_1\, d\Gamma_1\, d\Omega_0, \tag{24}$$

wenn F_1 den Wert von F nach Vertauschung der Werte der unabhängigen Variablen vor dem Prozeß mit denen nach dem Prozeß und umgekehrt und nachfolgender Vorzeichenänderung der Werte der Impulse bedeutet. Wir werden nun für die Abhängigkeit von F vom Strahlungsfeld spezielle Ansätze machen und dann untersuchen, für welches Strahlungsfeld die Bedingung (24) erfüllt ist, wenn man hierin gemäß der Maxwellschen Verteilung einsetzt:

$$n : n_1 = e^{-\frac{U}{kT}} : e^{-\frac{U_1}{kT}} = e^{\frac{h\nu}{kT}} : e^{\frac{h\nu_1}{kT}}\text{[1]}, \tag{25}$$

worin die letztere Gleichung aus (1) und (II) folgt.

Die zunächst sich darbietende Annahme ist offenbar die Proportionalität von F mit der spektralen Strahlungsdichte ϱ_ν:

$$F = A\varrho_\nu, \tag{26}$$

welche ja nach dem in § 1 Gesagten gewiß zutreffend ist für eine einfallende Strahlung, die aus einer einfachen streng monochromatischen Welle besteht. Wir wollen also nun die Konsequenzen der Annahme von (26) auch für ein beliebig beschaffenes Strahlungsfeld verfolgen.

[1]) Dies gilt auch bei Berücksichtigung der relativistischen Massenveränderlichkeit der Elektronen (vgl. z. B. Mathem. Enzykl., l. c., S. 700).

Da sich bekanntlich [1]) ϱ_ν bei Lorentztransformationen ebenso transformiert wie ν^3, folgt aus (21)

$$A = \frac{\Psi}{U E^4}, \tag{27}$$

worin Ψ bei Lorentztransformationen invariant ist und außerdem im Gegensatz zur Funktion Φ in (21) nicht mehr von den das Strahlungsfeld charakterisierenden Größen abhängt. Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen ist deshalb die erstere Größe eine Funktion von J_1 und J_2, deren nähere Bestimmung für unseren Zweck nicht erforderlich ist [2]). Wir haben nur von der im vorigen Paragraphen begründeten Relation

$$\Psi = \Psi_1 \tag{28}$$

Gebrauch zu machen. Aus dieser folgt gemäß (27) und (18) rückwärts:

$$A \nu^3 d\mathfrak{G}\, d\Gamma\, d\Omega_0 = A_1 \nu_1^3 d\mathfrak{G}_1\, d\Gamma_1\, d\Omega_0. \tag{29}$$

Dividiert man (24) durch diese Relation, nachdem man (25) und (26) substituiert hat, so folgt:

$$\frac{\varrho_\nu}{\nu^3} e^{\frac{h\nu}{kT}} = \frac{\varrho_{\nu_1}}{\nu_1^3} e^{\frac{h\nu_1}{kT}} = \text{const}$$

oder

$$\varrho_\nu = \text{const}\ \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \tag{30}$$

Man erhält also das Wiensche statt das Plancksche Strahlungsgesetz.

Dieses Ergebnis bedeutet, daß der Ansatz (26) für die Häufigkeitsfunktion nicht allgemein gültig ist und insbesondere, daß für den Grenzfall, wo $h\nu$ klein ist gegenüber kT nicht der erforderliche asymptotische Anschluß an die statistischen Resultate der klassischen

---

[1]) Vgl. z. B. K. v. Mosengeil, Berl. Diss., 1906; Ann. d. Phys. **22**, 867, 1907; A. Einstein. Phys. ZS., l. c.

[2]) Debye und Compton haben verschiedene Ansätze für dieselbe gemacht. Die einfachste Annahme, die derjenigen von Compton sehr nahe kommt, ist wohl die, daß im Normalkoordinatensystem die klassische Thomsonsche Streuungsformel gelten soll. Für die Streuung von zu Beginn des Prozesses ruhenden Elektronen ergibt sich dann dieselbe Abhängigkeit vom Winkel wie bei Compton, jedoch ein kleiner Unterschied im Absolutwert. Die gesamte Schwächung der einfallenden Strahlung ergibt sich als $\frac{1+x}{1+2x}$ mal kleiner als der nach der Thomsonschen Formel berechnete (von ν unabhängige) Wert, wenn $x = \frac{h\nu}{m_0 c^2}$ bedeutet. Dagegen würde nach dem Debyeschen Ansatz diese Gesamtschwächung im Gegensatz zu den bisherigen Erfahrungsergebnissen dieselbe sein wie die auf Grund der Thomsonschen Formel berechnete.

Theorie erreicht ist. Betrachten wir deshalb, um zu einer Verbesserung des in Rede stehenden Ansatzes zu gelangen, diese Resultate etwas näher. Nach der klassischen Theorie tritt im ungeordneten Strahlungsfelde neben derjenigen Wirkung der Strahlung auf das bewegte Elektron, die als Summe der Wirkungen der einzelnen monochromatischen Wellenzüge der verschiedenen Frequenzen beschrieben werden kann, noch eine andere Wirkung auf, die für das Strahlungsgleichgewicht wesentlich mitbestimmend ist. Die Strahlung mit einer Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$ besteht aus einer Anzahl von Elementarwellen mit unregelmäßig wechselnden Phasen und Frequenzen, die zwar nahe gleich, aber nicht ganz identisch sind. Wie die Rechnung zeigt, führt dies infolge des Mitschwingens des Elektrons im Rhythmus der auffallenden Strahlung zu unregelmäßigen Schwankungen der vom Strahlungsfeld auf das Elektron ausgeübten Kraft, die aus den Schwebungen der übereinander gelagerten Rhythmen der einzelnen Elementarwellen der Strahlung entstehen. Dies gibt im Zeitmittel Anlaß zu einer Absorption von Strahlung mit einer Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$, die proportional dem mittleren Quadrat der Impulsschwankungen des Elektrons ist und sich als proportional zum Quadrat der spektralen Strahlungsdichte, das ist zu ϱ_ν^2, ergibt[1]).

Wir müssen also versuchen, in die quantentheoretische Häufigkeitsfunktion F außer dem Term (26) noch einen Zusatzterm einzuführen, der ein Analogon zu diesen Interferenzschwankungen der klassischen Theorie bildet. Würden wir nun diesen Zusatzterm einfach proportional zu ϱ_ν^2 setzen wie in der klassischen Theorie, so würden wir keine Übereinstimmung mit dem Planckschen Strahlungsgesetz erhalten. Wir wollen jedoch zeigen, daß man zum Ziel kommt, wenn man ihn proportional setzt dem Produkt $\varrho_\nu \varrho_{\nu_1}$ der spektralen Strahlungsdichte bei den Frequenzen zu Beginn und am Ende des Elementarprozesses. Das heißt, wir setzen

$$F = A\varrho_\nu + B\varrho_\nu \varrho_{\nu_1}. \tag{III}$$

Dieser Ansatz bedeutet, daß der Elementarprozeß $h\nu \longrightarrow h\nu_1$ öfter vor sich geht, wenn sowohl Strahlung der Frequenz ν als auch Strahlung der Frequenz ν_1 vorhanden ist, als wenn nur die Strahlung der ersteren Frequenz ν allein vorhanden ist. Diese Aussage muß dann natürlich unabhängig vom Vorhandensein des thermischen Gleich-

1) Vgl. hierzu A. D. Fokker, l. c., ferner A. Einstein und L. Hopf, Ann. d. Phys. 33, 1105, 1910, wo am Beispiel des Planckschen Oszillators zum ersten Mal das Gleichgewicht zwischen Strahlungsenergie und Translationsenergie materieller Systeme auf Grund der klassischen Theorie berechnet ist.

zwischen Strahlung und freien Elektronen auch in der Quantentheorie eine wechselseitige Beeinflussung von Strahlenbündeln angenommen werden muß, und zwar auch von solchen, die verschiedene Frequenzen besitzen. Die Ausdrücke (III) und (IV) betreffend die Häufigkeitsfunktion der Elementarprozesse können wohl als eine thermodynamische Konsequenz der Compton-Debyeschen Grundannahmen (I) und (II) angesehen werden[1]). Obwohl ferner diese Annahmen selbst vielleicht nicht streng thermodynamisch begründet werden können, dürfte sich doch kaum ein anderer quantentheoretischer Mechanismus für die Wechselwirkung zwischen Strahlung und freien Elektronen angeben lassen, der in so einfacher und natürlicher Weise zum Planckschen Strahlungsgesetz führt.

Wir möchten endlich noch bemerken, daß es naheliegend ist, einen dem Compton-Debyeschen Ansatz analogen auch für die Streustrahlung anderer Systeme anzunehmen. So wird man dazu geführt, schon bei der Streustrahlung der Atome, wie wir ihr bei den Dispersionserscheinungen im optischen Gebiet begegnen, nicht eine strenge Erhaltung der Frequenz der Strahlung anzunehmen, sondern die voranstehenden Formeln, in denen ja die Streuungsfunktion A unbestimmt blieb, mit der Abänderung als gültig anzunehmen, daß die Elektronenmasse m_0 durch die Masse M des ganzen Atoms ersetzt wird. Denn da hier durch die Strahlung kein Elektron aus dem Atom entfernt wird, kann nur das Atom als Ganzes einen Rückstoß erfahren. Dieser Umstand bringt weiter mit sich, daß hier für ein anfangs ruhendes Atom der Unterschied von ν und ν_1 so klein wird, daß er innerhalb die durch die endliche Kohärenzlänge bestimmte Genauigkeit der Definition der Frequenz ν der Strahlung fällt. Durch die voranstehenden Betrachtungen ist gezeigt, daß bei Annahme eines solchen Mechanismus die mit den Dispersionsphänomenen verknüpfte Streustrahlung mit dem Planckschen Strahlungsgesetz im Einklang ist, ebenso wie nach der Einsteinschen Theorie die mit eigentlichen

[1]) Eliminiert man zunächst $e^{\frac{h\nu}{kT}}$ und $e^{\frac{h\nu_1}{kT}}$ gemäß (4) aus (24) und (25), so erhält man leicht den allgemeinsten mit dem Planckschen Strahlungsgesetz und dem Relativitätsprinzip vereinbaren Ausdruck für F, der nur von der Strahlungsdichte bei den Frequenzen ν und ν_1 am Anfang und Ende des Prozesses, nicht aber von derjenigen bei den dazwischenliegenden Frequenzen abhängt. Dieser geht aus dem im Text angegebenen durch Multiplikation mit einer derartigen Funktion von $\frac{\varrho_\nu}{\nu^3}$ und $\frac{\varrho_{\nu_1}}{\nu_1^{\,3}}$ hervor, deren Wert bei Vertauschung der Werte dieser Variablen ungeändert bleibt. Von der Möglichkeit einer solchen Verallgemeinerung von (III), für die auch in der Einsteinschen Theorie ein Analogon besteht, dürfte man jedoch in den meisten Fällen, wenn nicht überhaupt, absehen können.

Quantensprüngen verknüpfte Resonanzstrahlung, bei der die Reemission der Strahlung erst nach der endlichen Verweilzeit des Atoms im angeregten Zustand erfolgt.

Es sei hier zum Schluß noch auf folgenden Umstand hingewiesen, der die Begrenzung der im voranstehenden durchgeführten Betrachtungsweise deutlich macht. Bei der Behandlung des Problems auf Grund der klassischen Theorie wird die Bewegung der Elektronen in eine erzwungene Schwingungsbewegung unter dem Einfluß des Strahlungsfeldes und eine translatorische Bewegung zerlegt gedacht (in dem zuletzt besprochenen Fall der optischen Dispersionserscheinungen bezieht sich dabei die translatorische Bewegung auf das Atom als Ganzes). In unseren quantentheoretischen Überlegungen haben wir allein die letztere Bewegung in Betracht gezogen, die für die Energie- und Impulsbilanz maßgebend ist. Einer sinngemäßen Beschreibung des quantentheoretischen Analogons zur erzwungenen Schwingungsbewegung der klassischen Theorie stehen zurzeit noch große prinzipielle Schwierigkeiten entgegen.

Kopenhagen, Universitetets Institut for teoretisk Fysik.